確率と確率空間

確率

- コイン投げ：表・裏がでる確率 1/2 づつ
- サイコロ振り：1の目のでる 〃 1/6

1.1 標本空間と事象 （集合論による定義）

標本点 ω　　サイコロ振りの場合，標本点は 1〜6

標本空間 Ω　　全標本点から成る集合

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$\omega \in \Omega$$

事象 は $\overbrace{\text{部分集合}}^{\Omega\text{の}}$

A

$A \subset \Omega$

偶数の目の全体：A，　$A = \{2, 4, 6\}$

サイコロを振って偶数の目が出る

→「事象 A が起きる」という

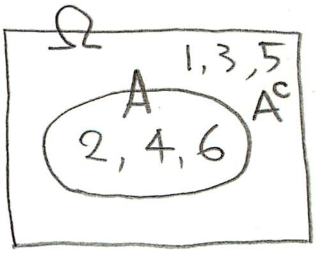
Ω は全事象，ϕ（空集合）は空事象，と表わす

補事象 は 補集合 (op)

A^c →「事象 A が起きない」という事象，A^c と表わす

$A^c \subset \Omega$

$$A^c = \{1, 3, 5\}$$



3の倍数の目の事象 B: $B=\{3,6\}$

和事象 op
$A \cup B$

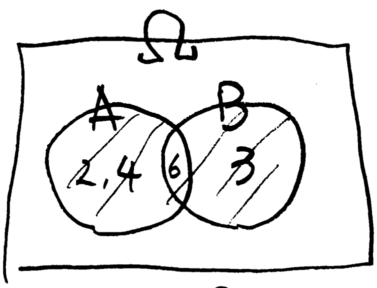
「AとBのうち少なくとも一つが起きる」という事象

$$A \cup B = \{\omega : \omega \in A \text{ または } \omega \in B\}$$
$$= \{2,3,4,6\}$$

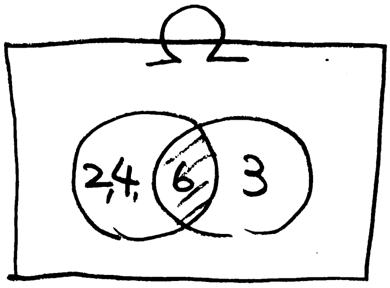
積事象 op
$A \cap B$

「AとBが同時に起きる」という事象

$$A \cap B = \{\omega : \omega \in A \text{ かつ } \omega \in B\}$$
$$= \{6\}$$



$A \cup B$



$A \cap B$

排反
(disjoint)
$A \cap B = \phi$

同時に起きない二つの事象を「互いに排反である」

事象 A,Bが排反ならば $A \cap B = \phi$

ドモルガンの法則

$$(A\cup B)^c = A^c\cap B^c$$
$$(A\cap B)^c = A^c\cup B^c$$

証明を練習問題にする

証明するとは?

三つの事象に対する演算(op)

演算　$(A\ op_1\ B)\ op_2\ C$ と考えると二つの事象に対する演算から自然に(帰納的に)定められる

排反: 全ての二組の事象が互いに排反.
(定義)

結合法則と分配法則

$$(A\cup B)\cup C = A\cup (B\cup C) = A\cup B\cup C$$
$$(A\cap B)\cap C = A\cap (B\cap C) = A\cap B\cap C$$
$$(A\cup B)\cap C = (A\cap C)\cup (B\cap C)$$
$$(A\cap B)\cup C = (A\cup C)\cap (B\cup C)$$

1.2 確率の定義

確率 $P(A)$

事象 A の起きやすさを表わす量

$P(A)$: 事象 A の起きる確率

サイコロの例

サイコロの目が i である確率は

i: $P(\{i\}) = \frac{1}{6}$

偶: $P(\{2,4,6\}) = \frac{1}{2}$

様々な標本空間の事象に対する $P(A)$ が持つべき性質

確率の公理

十分か?

$$\begin{cases} 0 \leq P(A) \leq 1 \\ P(\phi) = 0 \\ P(\Omega) = 1 \end{cases}$$

事象 A と B が排反ならば

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

∴ 互いに排反な事象 $A_{i=1:n}$ に対し

$$P(\bigcup A_i) = \sum P(A_i)$$

1.3 確率の性質

簡単に公理から導けること

$$P(\phi)=0$$

$$P(A^c)=1-P(A)$$

$$A\subset B \rightarrow P(A)\leq P(B)$$

加法定理 $P(A\cup B)$

$$A\cap B=\phi \rightarrow P(A\cup B)=P(A)+P(B)$$

$$A\cap B\neq\phi \rightarrow P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

1.4 条件付確率

例 {赤, 白}色の{1, 2}番号付いた球の入った袋.

袋の中から取り出した球が赤色であった時,
番号が1である確率を求めたい.

事象として表わす.

- 標本点 (色, 番号), ex. (赤, 1), …
- 赤色を取り出す事象: {(赤, 1), (赤, 2)} と表わす.
  簡単に
  {(赤, *)} と表わす.
- 1の球を取り出す〃 {(*, 1)}

条件付確率 A: {(赤, *)} が起きたという条件下で
B: {(*, 1)} 〃 る確率
$P(B \mid A)$ と記す.

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

乗法定理

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B \mid A) = P(B) \times P(A \mid B)$$

1.5 独立性

状況設定　二つのサイコロを同時に振る

出目表現　(i, j) と表わす（出目を）

確率　(i, j) が起きる確率は $1/36$ とする。

$(i$ ← 一つ目, $j)$ ← 二つ目

$(i, *)$ は　一つ目が i である全て

$(*, j)$ は 二つ目が j　〃

条件付確率
$$P(\{(*, j)\} \mid \{(i, *)\}) = \frac{P(\{*, j\} \cap \{i, *\})}{P(\{i, *\})} = \frac{P(\{i, j\})}{P(\{i, *\})} = \frac{1/36}{1/6} = \frac{1}{6} = P(\{*, j\})$$

$$\therefore P(\{(*, j)\} \mid \underbrace{\{(i, *)\}}_{(i,*)\text{によらず一定.}}) = P(\{*, j\})$$

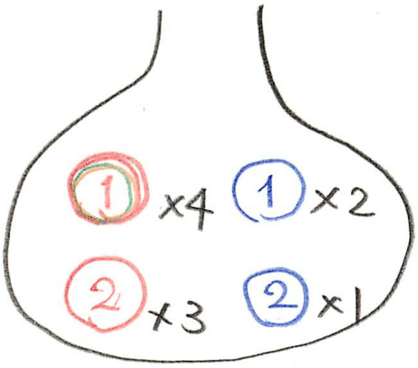
独立
$$P(B \mid A) = P(B)$$
事象AとBは独立.

$$P(B \mid A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

$$P(B \cap A) = P(A) \cdot P(B \mid A)$$ なので

独立なら
$$P(B \cap A) = P(A) \cdot P(B)$$

図1.4



「赤玉を取り出した後で、玉の数字が1である」確率 (P_a)

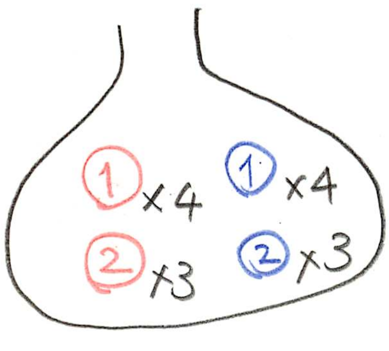
$$P(\{(*,1)\} \mid \{(赤,*)\}) = \frac{4/10}{7/10} = \frac{4}{7}$$

数字が1である玉を取り出す確率 (P_b)

$$P(\{(*,1)\}) = \frac{6}{10}$$

$P_a \neq P_b$ なので 事象$\{(赤,*)\}$と$\{(*,1)\}$は図1.4の場合は、独立ではない。

図1.5の場合



$$P(\{(*,1)\} \mid \{(赤,*)\}) = \frac{4/14}{7/14} = \frac{4}{7}$$

$$P(\{(*,1)\}) = \frac{8}{14} = \frac{4}{7}$$

この時は独立。 青と赤の対称性

(に関する)

独立性

三つ以上の事象の場合.

定義

事象 $A_{i=1:n}$ に対して,

${}^{\forall}A_{i_j=1:k}$ k個取り出し,

$$P\left(\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}\right) = \prod_{j=1}^{k} P(A_{i_j})$$ の時,

もとのn個の事象 $A_{i=1:n}$ は独立である

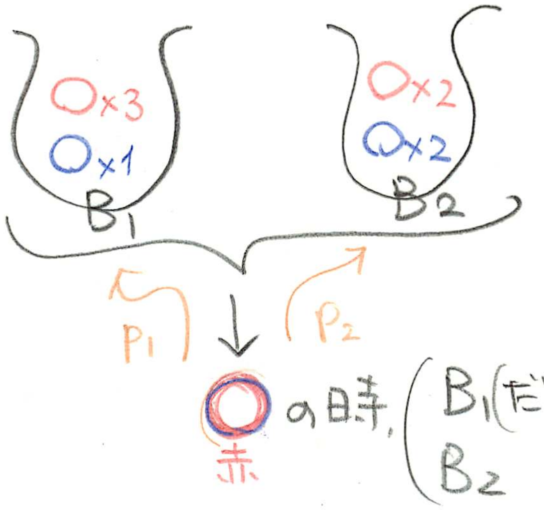
事象の演算と独立性

A indep B $\longrightarrow$ A indep B^c

A indep B indep C $\rightarrow$ $A \cap B$ indep C

1.6 ベイズの定理

知りたい事



の時, $\begin{pmatrix} B_1\text{(だった) 確率} \\ B_2 \quad 〃 \quad 〃 \end{pmatrix}$ 知りたい.

状況の記述　B_i : 袋B_iから取り出した事象
　　　　　　A : 赤玉だった事象

事後確率
$$\begin{cases} P(B_1 | A) \\ P(B_2 | A) \end{cases}$$

既知の条件付確率
$$\begin{cases} P(A | B_1) = \dfrac{3}{4} \\ P(A | B_2) = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

袋を選ぶpは想定　$P(B_1) = P(B_2) = 1/2$

積事象のp
$$P(A \cap B_1) = P(B_1) \times P(A | B_1) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$$
$$P(A \cap B_2) = P(B_2) \times P(A | B_2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

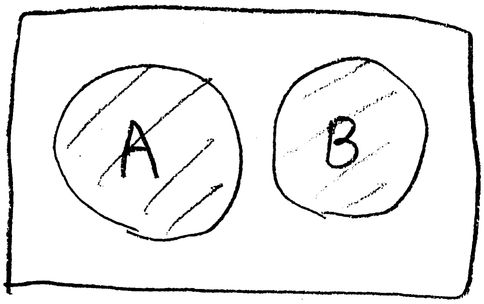
赤玉を引く確率 $P(A)$

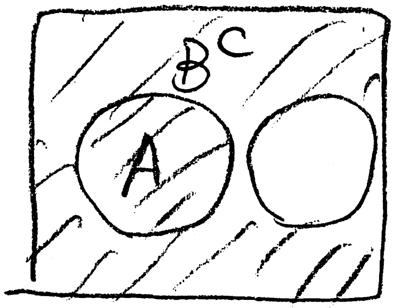
$$\begin{aligned}P(A) &= P(A\cap\Omega)\\ &= P(A\cap\{B_1\cup B_2\})\\ &= P(\{A\cap B_1\}\cup\{A\cap B_2\})\\ &= P(A\cap B_1)+P(A\cap B_2)\\ &= \frac{3}{8}+\frac{1}{4}=\frac{5}{8}\end{aligned}$$

正当性。　8個の玉（赤5個，青3個）から赤玉(5)を引く p.

$P(B_i|A)$

$$\begin{cases} P(B_1|A)=\dfrac{P(B_1\cap A)}{P(A)}=\dfrac{3/8}{5/8}=\dfrac{3}{5} \\[2ex] P(B_2|A)=\dfrac{P(B_2\cap A)}{P(A)}=\dfrac{1/4}{5/8}=\dfrac{2}{5}\end{cases}$$





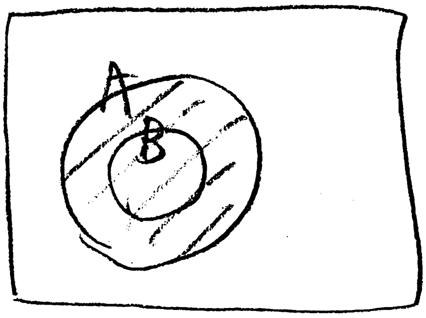
$B^C \supset A$

$A \cap B = \phi$

$A \cap B^C = A$

$A \cap B^C = A$

$A \cap B = \phi$

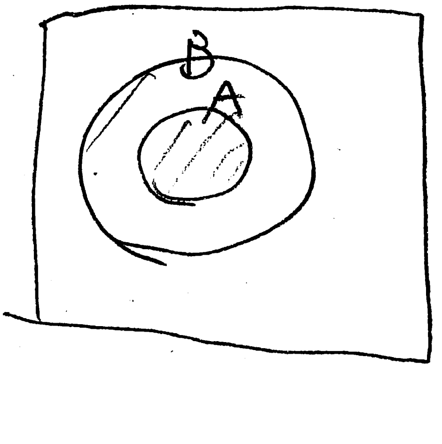


$B \to A$

$(B \subset A)$

$P(B) = P(A \cap B)$

$A \cap B = B$



$A \to B$

$(B \supset A)$

$A \cap B = A$

ベイズの定理の一般化

排反な事象 $B_{i=1:k}$　$\Omega = \cup B_i,\ B_i \cap B_j = \phi$
$(i \neq j)$

事前確率　$P(B_i) = p_i$ は既知, とする

各 B_i の下で A が起きる

$P(A \mid B_i)$ も既知, とする
$i=1:k$

全確率の定理

$$
\begin{aligned}
P(A) &= P(A \cap \Omega) \\
&= P(A \cap \cup_1^k B_i) \\
&= P(\cup_1^k \{A \cap B_i\}) \\
&= \sum_1^k P(A \cap B_i) \\
&= \sum P(B_i) \cdot P(A \mid B_i)
\end{aligned}
$$

ベイズの定理

$$
\begin{aligned}
P(B_i \mid A) &= \frac{P(A \cap B_i)}{P(A)} \\
&= \frac{P(B_i) \cdot P(A \mid B_i)}{\sum P(B_i) \cdot P(A \mid B_i)}
\end{aligned}
$$

1.7.1 くじを引く順番で当たる確率が違うのか

状況設定　袋の中に $\begin{cases} \text{あたり } 3\text{つ} \\ \text{はずれ } 7\text{つ} \end{cases}$

事象　事象 A：最初の人が当たる
　　　〃 B：次の人が当たる

$P(A)$　$P(A) = 3/10$
$P(A^c) = 1 - 3/10 = 7/10$

$P(B|A)$　$P(B|A) = 2/9$
$P(B|A^c) = 3/9$

$P(B)$

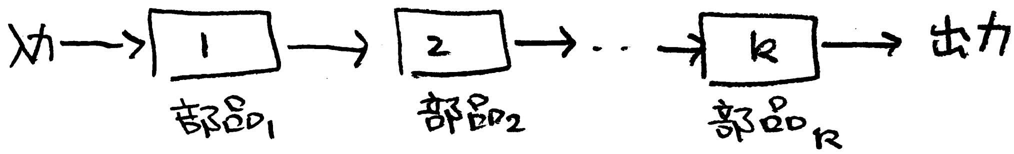
$$P(B) = P(A) \cdot P(B|A) + P(A^c) \cdot P(B|A^c)$$
$$= 3/10 \cdot 2/9 + 7/10 \cdot 3/9$$
$$= \frac{6}{90} + \frac{21}{90} = \frac{27}{90} = \frac{3}{10}$$

∴　最初の人と次の人で当たる確率は同じ

∴　1〜10人まで当たる確率は同じ　（帰納法）

1.7.2 システム全体の故障確率

k-直列システム



事象 A_i：部品iの状態（値） $\begin{cases} A_{iN} & \text{Normal} \\ A_{iF} & \text{Failure} \end{cases}$

部品iの故障率 $P(A_{iF})=p$ と定める

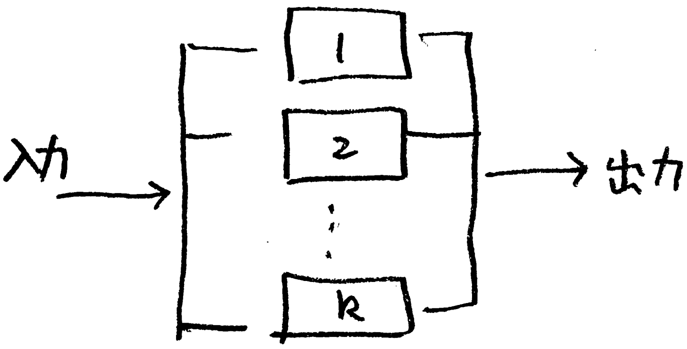
システム全体の正常性と故障性

正常　$P(A_{1N}\cap\cdots\cap A_{kN})=\prod P(A_{iN})=(1-p)^k$

故障　$P((A_{1N}\cap\cdots\cap A_{kN})^c)=1-(1-p)^k$

システムの信頼性を上げるためには，部品の高信頼性が求められる

k-並列システム



「一台でも動いていれば
システムは〃 いる」
となる

システムの正常さ $A_{1N} \cup A_{2N} \cup \cdots \cup A_{kN}$ であればよい.

を事象の演算で表わすと

$$P((A_{1N} \cup \cdots \cup A_{kN})^c)$$
$$= 1 - P(\cup A_{iN})$$
$$= 1 - p^k$$

部品の信頼性が低くても,
システムの信頼性が得られる

1.7.3 検査の信頼性

状況設定

病気U, Uの検査法G

Gの信頼性 99/100,

(1/100の確率で罹っていると判定.
罹っていなくても)

Uの罹患率 1/100 (とても小さい)

事象表現

事象 A: Uに罹っている

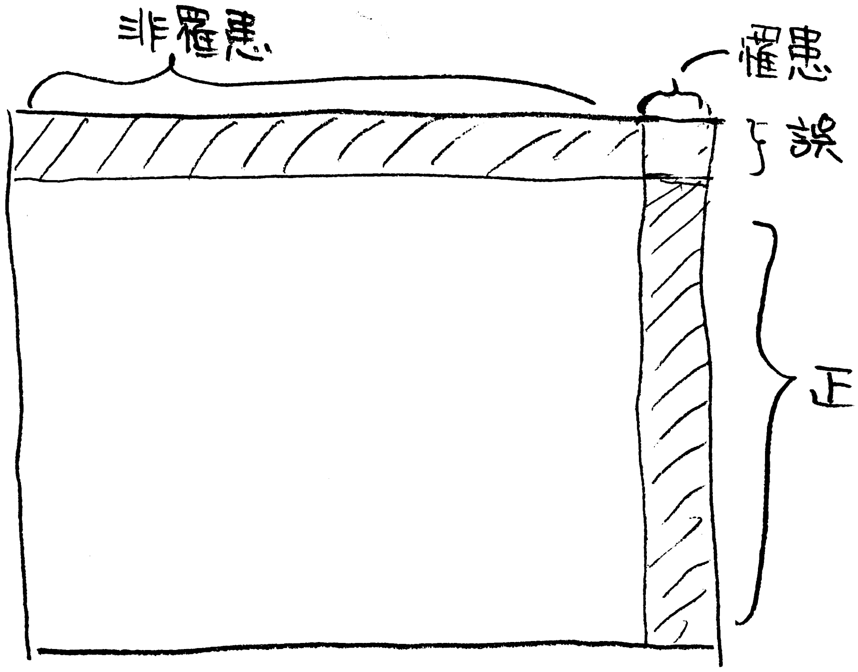
〃 B: GがUに罹っていると判定する事象

確率設定

$$P(A)=\frac{1}{100}$$

$$P(B|A)=\frac{99}{100}$$

$$P(B|A^c)=\frac{1}{100}$$



Gの信頼性

「GがUと判定した時，本当にUに罹っている」確率

$P(A \mid B)$ が非常に高い．

（誤検出率が低い）

$$P(A \mid B) = \frac{P(A)P(B \mid A)}{P(A)P(B \mid A) + P(A^c)P(B \mid A^c)}$$

$$= \frac{(1/100)(99/100)}{(1/100)(99/100) + (99/100)(1/100)}$$

$$= \frac{1}{2}$$

見逃し率 $P(B^c \mid A) = 1/100$

1.8 確率空間

（標本空間が無限であることを考慮した）

確率の公理

(1) 事象 A に対し，P(A) は実数　$0 \leq P(A) \leq 1$

$(P : \{事象\} \to R)$

(2) 全事象に対する確率は 1　$P(\Omega) = 1$

(3) 互いに排反な事象 $A_{i=1:\infty}$ に対し

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

上記の「確率の公理」の不正確さを確かめる

確率関数 P(A)

A：事象Aの取り得る可能性を同定する

P(A)：関数Pが返す値

事象の集合族 $\mathcal{A}$

事象：標本値の集合，

$\mathcal{A}$：事象の集合（族）

$A \in \mathcal{A}$

$P : \mathcal{A} \to R$

$\mathcal{A}$ の性質

全事象 Ω を含むこと

空 〃 ϕ 〃

事象 $A \in \mathcal{A} \to A^c \in \mathcal{A}$

和事象 $\in \mathcal{A}$

$\mathcal{A}$が満たす性質
(シグマ集合体)

(1) $\Omega \in \mathcal{A}$

(2) $A \in \mathcal{A} \rightarrow A^c \in \mathcal{A}$

(3) $A_{i=1:\infty} \in \mathcal{A} \rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$

確率空間を作る

① 標本空間 Ω を用意する
(標本からできる集合)

② Ωの部分集合(事象)を元とする
シグマ集合体 $\mathcal{A}$ を用意する

③ $\forall A \in \mathcal{A}$: $P(A)$を定める
(すべての事象に対して確率を定める)

$P: \mathcal{A} \rightarrow R$

Pは確率の公理を満たす

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$: 確率空間と呼ぶ

確率空間の例

サイコロ投げ

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$：

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$\mathcal{A} = 2^{\Omega}$ = Ωの全部分集合の集合

$P(A) = |A|/6$

集合の濃度，元の個数，